

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**Faza locală**

**Braşov, 14 februarie 2025**

**Soluții**

**Clasa a V-a**

1. Arătați că numerele de forma  $5^{n+4} \cdot 2^n - 625$  se împart exact la 5625, pentru orice număr natural  $n$ .

Gazeta Matematică

**Soluție.**

Fie  $n \in \mathbb{N}$ .

Dacă  $n = 0$ , atunci  $5^{0+4} \cdot 2^0 - 625 = 0$ , iar 0 se împarte exact la orice număr natural nenul.

.....1p

Dacă  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $5^{n+4} \cdot 2^n - 625 = 625(10^n - 1)$  .....3p

$10^n - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{\text{de } n \text{ ori}} = 9 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{\text{de } n \text{ ori}}$  .....1p

Obținem  $5^{n+4} \cdot 2^n - 625 = 5625 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{\text{de } n \text{ ori}}$ . Rezultă că numărul  $5^{n+4} \cdot 2^n - 625$  se împarte exact la 5625 .....2p

2. (a) Scrieți numărul 2025 ca suma a două pătrate perfecte nenule.  
(b) Scrieți numărul  $a = 2025^{2025}$  ca sumă a două pătrate perfecte nenule.

George Chetreanu

**Soluție.**

(a)  $2025 = 81 \cdot 25 = 81 \cdot (9 + 16) = 81 \cdot 9 + 81 \cdot 16 = 27^2 + 36^2$  .....3p

(b)  $a = 2025^{2024} \cdot 2025 = 2025^{2024} \cdot (27^2 + 36^2)$  .....2p

$a = (2025^{1012} \cdot 27)^2 + (2025^{1012} \cdot 36)^2$  .....2p

*Observație.*

$27^2 + 36^2$  este unica scriere a numărului 2025 ca suma a două pătrate perfecte nenule.

3. Împărțind un număr de 4 cifre la răsturnatul său, obținem câtul 6 și restul 139. Aflați numărul, știind că diferența dintre cifra miilor și cea a unităților este 6, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a zecilor este 7.

\*\*\*

**Soluție.**

Fie  $n = \overline{abcd}$  numărul căutat. Răsturnatul său este  $\overline{dcba}$ .

Conform ipotezei,  $\overline{abcd} = 6 \cdot \overline{dcba} + 139$  ..... **2p**

Dacă  $d \geq 2$ , atunci  $n > 12000$ ; fals. Deci  $d = 1$ . Rezultă  $a = 1 + 6 = 7$  ..... **2p**

Obținem  $7001 + 10 \cdot \overline{bc} = 6042 + 60 \cdot \overline{cb} + 139$ , de unde  $82 + \overline{bc} = 6 \cdot \overline{cb}$ .

Rezultă  $82 + 4b = 59c$  ..... **1p**

Cum  $b = c + 7$ , avem  $82 + 4(c + 7) = 59c$ . Obținem  $c = 2$ . ..... **1p**

Atunci  $b = 2 + 7 = 9$ . Numărul căutat este  $n = 7921$  ..... **1p**

4. La un concurs, la care au participat 3 elevi, s-au formulat 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 10 puncte, iar pentru un răspuns greșit se scad 5 puncte. Concurenții au obținut în total 240 de puncte. Știind că al doilea a răspuns la un număr de întrebări mai mare cu 3 față de primul concurent, aflați la câte întrebări a răspuns corect fiecare concurent.

Adriana Cațaron

**Soluție.**

Punctajul maxim care poate fi obținut de un concurent este 100 puncte. Pentru fiecare răspuns incorect, un concurent pierde  $10+5=15$  puncte ..... **2p**

Cei trei concurenți au pierdut în total  $3 \cdot 100 - 240 = 60$  puncte. Atunci concurenții au dat în total  $60 : 15 = 4$  răspunsuri incorecte ..... **2p**

Primul concurent a greșit cel puțin 3 răspunsuri. Dacă primul concurent ar fi greșit cel puțin 4 răspunsuri, atunci al doilea concurent ar fi greșit cel puțin un răspuns. Rezultă că în total concurenții ar fi greșit cel puțin 5 răspunsuri. Fals. .... **2p**

Rezultă că primul concurent a răspuns corect la 7 întrebări, al doilea concurent la 10 întrebări și al treilea concurent la 9 întrebări ..... **1p**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**Faza locală**

**Braşov, 14 februarie 2025**

**Soluții**

**Clasa a VI-a**

1. Fie numerele naturale nenule  $a, b, c, d$ , astfel încât  $a, b$  și  $c$  sunt direct proporționale cu 5, 6 și 8, iar  $c$  și  $d$  sunt invers proporționale cu 0,25 și 0,1(6).

- (a) Ce procent reprezintă  $b$  din  $d$ ?  
(b) Determinați numerele  $a, b, c$  și  $d$  știind că  $a + 2b + 2c + 4d = 2025$ .

Mihaela Sinteia

**Soluție.**

- (a) Conform ipotezei,  $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$  și  $0,25 \cdot c = 0,1(6) \cdot d$  .....**2p**

Obținem

$\frac{c}{4} = \frac{d}{6}$ . Atunci  $\frac{b}{6} = \frac{c}{8} = \frac{d}{12}$ . Rezultă  $b = \frac{d}{2}$ , deci  $b$  este 50% din  $d$  .....**2p**

- (b) Avem  $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8} = \frac{d}{12} = \frac{a + 2b + 2c + 4d}{5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 12} = \frac{2025}{81} = 25$  .....**2p**

Obținem

$a = 125, b = 150, c = 200, d = 300$ .....**1p**

2. Fie mulțimile  $A = \{x \mid x = 2^n; n \in \mathbb{N}; 10 \leq n < 25\}$  și  $B = \{y \mid y = 2^m; m \in \mathbb{N}; 19 < m < 30\}$ .

- (a) Determinați mulțimea  $A \cap B$ .  
(b) Comparați suma elementelor mulțimii  $A$  cu suma elementelor mulțimii  $B$ .

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciții (enunț modificat)

**Soluție.**

- (a)  $A \cap B = \{2^n \mid 20 \leq n \leq 24\} = \{2^{20}, 2^{21}, \dots, 2^{24}\}$  .....**2p**

- (b) Notăm  $S_A$  și  $S_B$  sumele elementelor lui  $A$  și  $B$ .

Avem  $S_B - S_A = \underbrace{(2^{25} + 2^{26} + \dots + 2^{29})}_{5 \text{ termeni}} - \underbrace{(2^{10} + 2^{11} + \dots + 2^{19})}_{10 \text{ termeni}} > 5 \cdot 2^{25} - 10 \cdot 2^{19}$  .....**3p**

Din  $5 \cdot 2^{25} - 10 \cdot 2^{19} = 5 \cdot 2^{20} (2^5 - 1) > 0$ , rezultă  $S_B - S_A > 0$ , deci  $S_A < S_B$  .....**2p**

*Observație.* Se poate utiliza identitatea  $2^k + 2^{k+1} + \dots + 2^{k+n} = 2^k (2^{n+1} - 1)$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ .

3. Fie punctele  $S, O, P$ , coliniare, în această ordine. Se consideră  $Q$  și  $R$  două puncte situate în același semiplan determinat de dreapta  $SP$ . Numerele naturale prime  $a, b, c$  verifică relațiile: (a)  $a \cdot \widehat{QOR} = b \cdot \widehat{POQ}$ , (b)  $b \cdot \widehat{ROS} = c \cdot \widehat{QOR}$ , (c)  $2a + 8b + 12c = 64$ .

- (a) Determinați numerele prime  $a, b, c$ .  
 (b) Demonstrați că semidreapta ( $OR$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{SOQ}$  și  $OR$  este perpendiculară pe  $OE$ , unde semidreapta ( $OE$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{POQ}$ ).

Doina Păun

**Soluție.**

- (a)  $a + 4b + 6c = 32$ , cu  $a, b, c$  numere prime, implică  $a$  par, deci  $a = 2$  .....1p  
 Rezultă  $2b + 3c = 15$ . Cum  $3c$  și  $15$  sunt divizibile cu 3, rezultă  $b$  divizibil cu 3, deci  $b = 3$ . Obținem  $c = 3$  .....2p  
 (b) Notăm  $\widehat{POQ} = x$ ,  $\widehat{QOR} = y$ ,  $\widehat{ROS} = z$ . Conform ipotezei,  $2y = 3x$  și  $3z = 3y$ .  
 Din  $y = z$  rezultă că semidreapta ( $OR$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{SOQ}$  .....1p  
 Avem  $x + y + z = 180^\circ$ , deci  $3 \cdot 180^\circ = 3x + 3y + 3z = 8y$ . Rezultă  $y = \frac{3}{8} \cdot 180^\circ = 67^\circ 30'$ .  
 Atunci  $x = 180^\circ - (y + z) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$  .....2p  
 $\widehat{ROE} = \widehat{ROQ} + \widehat{EOQ} = y + \frac{x}{2} = 90^\circ$ , deci  $OR \perp OE$  .....1p

4. Punctele  $A_1, A_2, \dots, A_8$  sunt situate, în această ordine, pe un cerc de centru  $O$ , astfel încât măsurile arcelor  $\widehat{A_1 A_2}, \widehat{A_2 A_3}, \dots, \widehat{A_8 A_1}$  sunt direct proporționale cu  $1, 2, \dots, 8$ .

- (a) Determinați măsurile arcelor  $\widehat{A_1 A_2}, \widehat{A_2 A_3}, \dots, \widehat{A_8 A_1}$ .  
 (b) Demonstrați că punctele  $A_3$  și  $A_7$  sunt diametral opuse.  
 (c) Dacă punctul  $M$  este mijlocul lui  $\widehat{A_4 A_5}$  și  $N$  este simetricul punctului  $A_2$  față de punctul  $O$ , calculați măsura unghiului  $\widehat{MON}$ .

Rodica Cocalea

**Soluție.**

- (a) Avem  $\frac{\widehat{A_1 A_2}}{1} = \frac{\widehat{A_2 A_3}}{2} = \dots = \frac{\widehat{A_8 A_1}}{8} = \frac{\widehat{A_1 A_2} + \widehat{A_2 A_3} + \dots + \widehat{A_8 A_1}}{1 + 2 + \dots + 8} = \frac{360^\circ}{36} = 10^\circ$  .....2p  
 Rezultă  $\widehat{A_1 A_2} = 10^\circ, \widehat{A_2 A_3} = 20^\circ, \dots, \widehat{A_8 A_1} = 80^\circ$  .....1p  
 (b)  $\widehat{A_3 A_7} = \widehat{A_3 A_4} + \widehat{A_4 A_5} + \widehat{A_5 A_6} + \widehat{A_6 A_7} = 30^\circ + 40^\circ + 50^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ , deci punctele  $A_3$  și  $A_7$  sunt diametral opuse .....1p  
 (c) Cum  $M$  mijlocul  $\widehat{A_4 A_5}$ , avem  $\widehat{A_4 M} = \frac{\widehat{A_4 A_5}}{2} = 20^\circ$  .....1p  
 $\widehat{A_2 N}$  diametru, deci  $\widehat{A_2 N} = 180^\circ$  .....1p  
 $\widehat{MON} = \widehat{MN} = 180^\circ - \widehat{A_2 M} = 180^\circ - (\widehat{A_2 A_3} + \widehat{A_3 A_4} + \widehat{A_4 M}) = 110^\circ$  .....1p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**Faza locală**

**Braşov, 14 februarie 2025**

**Soluții**

**Clasa a VII-a**

1. Se consideră numerele:

$$A = \sqrt{\frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2^2}} + \sqrt{\frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2025^2 \cdot 2026} - \frac{1}{2025 \cdot 2026^2}},$$
$$B = \frac{1}{[\sqrt{1 \cdot 2}] \cdot [\sqrt{3 \cdot 4}]} + \frac{1}{[\sqrt{3 \cdot 4}] \cdot [\sqrt{5 \cdot 6}]} + \dots + \frac{1}{[\sqrt{2023 \cdot 2024}] \cdot [\sqrt{2025 \cdot 2026}]},$$

unde,  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

(a) Arătați că  $A$  este număr rațional.

(b) Calculați partea fracționară a numărului  $2025 - A \cdot B$ .

Lucica Ghișe

**Soluție.**

(a)  $\sqrt{\frac{1}{k^2(k+1)} - \frac{1}{k(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{(k+1) - k}{k^2(k+1)^2}} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, k \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$

$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right) = 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 1p$

(b) Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Din inegalitățile  $n^2 < n \cdot (n+1) < (n+1)^2$  rezultă  $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$ , deci  $[\sqrt{n(n+1)}] = n \dots\dots\dots 1p$

Atunci  $B = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2025} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2024}{2025} \dots\dots\dots 1p$

$A \cdot B = \frac{506}{1013} \dots\dots\dots 1p$

$\{2025 - A \cdot B\} = \frac{507}{1013} \dots\dots\dots 1p$

2. Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Demonstrați că dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^*$  au proprietatea că

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 2,$$

atunci cel puțin unul dintre numerele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  este egal cu 1 sau -1.

Romeo Ilie

**Soluție.**

Fie  $S_1$  suma numerelor pozitive și  $S_2$  suma numerelor negative.

Atunci  $S_1 + |S_2| - |S_1 - S_2| = 2$  .....3p

Cazul 1.  $S_1 \geq |S_2| \Rightarrow |S_2| = 1 \Rightarrow S_2 = -1$ . Unicul număr negativ este -1 .....2p

Cazul 2.  $S_1 < |S_2| \Rightarrow S_1 = 1$ . Unicul este număr pozitiv este 1 .....2p

3. Fie  $ABCD$  un romb și  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Consideră punctele  $E \in (CD)$  și  $M \in (AE)$ , astfel încât  $DM \perp AE$ . Fie  $F$  simetricul punctului  $A$  față de  $M$  și  $P$  mijlocul segmentului  $FC$ .

(a) Arătați că  $OM \perp PD$ .

(b) Dacă  $(AF$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{OAD}$ , demonstrați că  $PO = PD$ .

Gazeta Matematică

**Soluție.**

(a)  $OM$  linie mijlocie în  $\triangle ACF \Rightarrow OM \parallel FC$  (1) .....1p

$AD \equiv DF \equiv DC \Rightarrow \triangle DFC$  isoscel .....1p

$DP \perp FC$  (2)

Din (1) și (2) obținem  $OM \perp PD$  .....1p

(b) Cum  $\triangle DAF$  isoscel, avem  $\widehat{DFA} \equiv \widehat{DAF}$ .

$(AF$  bisectoarea  $\widehat{OAD}$  implică  $\widehat{DFA} \equiv \widehat{OAF}$ , de unde  $DF \parallel AO$  .....1p

$OC \perp OD$ ,  $DF \parallel OC$ , deci  $DOCF$  trapez dreptunghic .....1p

Fie  $S$  mijlocul segmentului  $OD$ .  $PS$  linie mijlocie în trapezul dreptunghic  $DOCF$ .

Atunci  $PS \perp DO$ , deci  $PS$  este mediatoarea segmentului  $DO$ . Rezultă  $PO = PD$ .

.....2p

4.  $ABCD$  este un paralelogram cu  $\widehat{BAD} = 30^\circ$  și  $\widehat{ABD} = 105^\circ$ . Fie un punct  $E$  pe latura  $AD$ , astfel încât  $AE = BE$ . Perpendiculara din  $D$  pe  $BC$  intersectează dreapta  $EB$  în  $F$ .
- (a) Demonstrați că  $BDCF$  este trapez isoscel.
- (b) Arătați că raportul dintre aria paralelogramului  $ABCD$  și aria trapezului  $BDCF$  este egal cu  $\frac{AB}{AD}$ .

Dorina Rapcea

**Soluție.**

- (a) În  $\triangle ABD$ ,  $\widehat{BAD} = 30^\circ$  și  $\widehat{ABD} = 105^\circ$ . Rezultă  $\widehat{DBC} = \widehat{ADB} = 45^\circ$   
 Fie  $DF \cap BC = \{M\}$ . Atunci  $\widehat{BDM} = 45^\circ$  .....1p  
 Din  $AE = BE$  rezultă  $\widehat{ABE} = \widehat{BAE} = 30^\circ$ , de unde  $\widehat{DBE} = 105^\circ - 30^\circ = 75^\circ$ .  
 Obținem  $\widehat{FBD} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ = \widehat{ABD}$ . Rezultă  $\triangle FBD \equiv \triangle ABD$  (U.L.U.).  
 Prin urmare,  $FB \equiv AB \equiv CD$  .....1p  
 $\triangle DMC \equiv \triangle BMF$  (I.C.) implică  $MC \equiv MF$   
 $\triangle CMF$  dreptunghic isoscel, deci  $\widehat{MCF} = 45^\circ$ .  
 $\widehat{MCF} = \widehat{MBD} = 45^\circ \implies BD \parallel CF$  (unghiuri alterne interne congruente).  
 Rezultă  $BDCF$  trapez isoscel .....2p
- (b)  $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AB \cdot AD}{2}$  .....1p  
 $\mathcal{A}_{BDCF} = \frac{BC \cdot DF}{2} = \frac{AD^2}{2}$  .....1p  
 Rezultă  $\frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{BDCF}} = \frac{AB}{AD}$  .....1p

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**Faza locală**

**Braşov, 14 februarie 2025**

**Soluții**

**Clasa a VIII-a**

1. Fie  $x, y \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $x^2(y+z) = y^2(z+x) = 2024$  și  $x \neq y$ . Calculați  $z^2(x+y)$ .

Gazeta Matematică

**Soluție.**

$$x^2(y+z) = y^2(x+z) \Leftrightarrow (x-y)(xy+yz+zx) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Cum } x \neq y, \text{ rezultă } xy+yz+zx = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$z^2(x+y) - x^2(y+z) = (z-x)(xy+yz+zx) = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Rezultă } z^2(x+y) = x^2(y+z) = 2024 \dots\dots\dots 1p$$

2. Determinați numerele reale nenule  $a, b, c$  știind că

$$a + \frac{1}{bc} = 2b, \quad b + \frac{1}{ac} = 2c \text{ și } c + \frac{1}{ab} = 2a.$$

Romeo Ilie

**Soluție.**

$$\text{Adunând relațiile, obținem } a+b+c = \frac{a+b+c}{abc} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dacă } abc = 1, \text{ atunci } bc = \frac{1}{a}, \quad ac = \frac{1}{b}, \quad ab = \frac{1}{c}. \text{ Rezultă } a = b = c = 1 \dots\dots\dots 3p$$

Presupunem, prin absurd,  $abc \neq 1$ . Rezultă că  $a+b+c = 0$ .

Din relațiile  $abc + 1 = 2b^2c = 2c^2a = 2a^2b$  deducem că  $a, b, c$  au același semn, deci  $a+b+c < 0$  sau  $a+b+c > 0$ . Contradicție  $\dots\dots\dots 2p$



3. O furnică se deplasează pe suprafața laterală a unui con de la punctul  $A$  la punctul  $B$ , unde  $AB$  este un diametru al bazei conului, parcurgând drumul cel mai scurt. Determinați lungimea drumului parcurs de furnică, știind că generatoarea conului are o lungime de 50 cm, iar prin desfășurarea suprafeței laterale a conului se obține un sector circular care are măsura unghiului la centru egală cu  $120^\circ$ .

Ioana Mașca

**Soluție.**

Fie  $VAA'$  sectorul circular sub care se desfășoară suprafața laterală a conului.

Punctul  $B$  este mijlocul arcului  $AA'$ . Rezultă  $\widehat{AVB} = \widehat{BVA'} = 60^\circ$  .....3p

Atunci  $\triangle VAB$  este triunghi echilateral .....2p

Lungimea drumului (minim) parcurs de furnică este  $AB = VA = 50$  cm. ....2p

4. Considerăm piramida triunghiulară  $VABC$  având  $VA \perp VB$ ,  $VB \perp VC$  și  $VC \perp VA$ . Fie  $VD \perp BC$ , cu  $D \in BC$  și  $VH \perp AD$ , cu  $H \in AD$ . Demonstrați că:

(a)  $(VAD) \perp (ABC)$ .

(b)  $H$  este ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

(c)  $\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{VAB}^2 + \mathcal{A}_{VBC}^2 + \mathcal{A}_{VCA}^2$ .

Marinela Canu

**Soluție.**

1.  $\left. \begin{array}{l} VA \perp VB \\ VA \perp VC \end{array} \right\} \Rightarrow VA \perp (VBC) \Rightarrow VA \perp BC.$   
 $\left. \begin{array}{l} BC \perp VA \\ BC \perp VD \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (VAD) \Rightarrow (ABC) \perp (VAD)$  .....2p

2.  $(ABC) \perp (VAD)$ ,  $(ABC) \cap (VAD) = AD$ ,  $VH \perp AD \Rightarrow VH \perp (ABC)$  .....1p

$\left. \begin{array}{l} BC \perp (VAD) \\ AH \subset (VAD) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AH; \quad \left. \begin{array}{l} AC \perp VB \\ AC \perp VH \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (VBH) \Rightarrow AC \perp BH.$

Rezultă că  $H$  este ortocentrul triunghiului  $ABC$  .....2p

3. Notăm  $VA = a$ ,  $VB = b$ ,  $VC = c$ . Avem

$$VD = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad AD^2 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\mathcal{A}_{ABC}^2 = \frac{a^2 b^2}{4} + \frac{b^2 c^2}{4} + \frac{c^2 a^2}{4} = \mathcal{A}_{VAB}^2 + \mathcal{A}_{VBC}^2 + \mathcal{A}_{VCA}^2 \dots\dots\dots 1p$$